

# Sistemi Intelligenti I fuzzy system: :esercitazione

Alberto Borghese

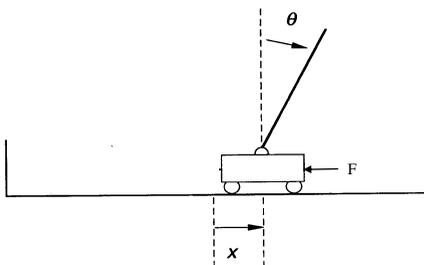
Università degli Studi di Milano  
 Laboratory of Applied Intelligent Systems (AIS-Lab)  
 Dipartimento di informatica  
[borgnese@di.unimi.it](mailto:borgnese@di.unimi.it)



## Esercitazione sui sistemi fuzzy



		$\theta$						
		NL	NM	NS	ZE	PS	PM	PL
$\theta'$	NL				PL			
	NM				PM			
	NS				PS	NS		
	ZE	PL	PM	PS	ZE	NS	NM	NL
	PS			PS	NS			
	PM				NM			
	PL				NL			



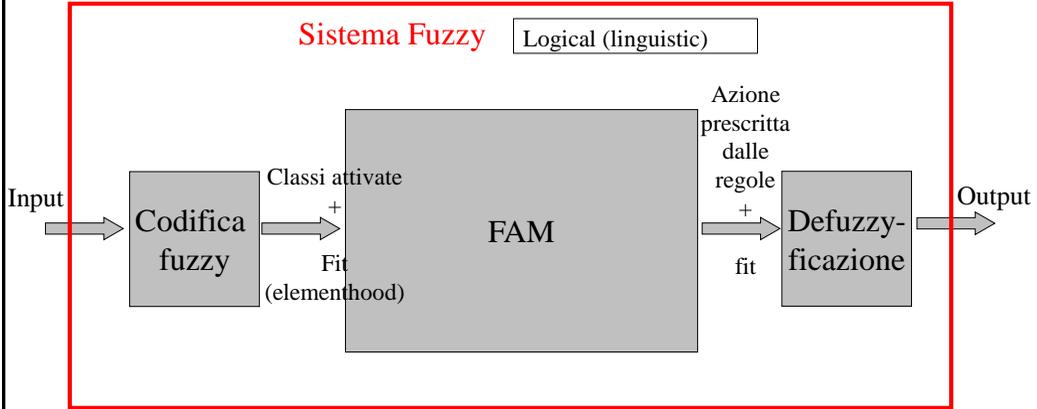


# Struttura di un sistema fuzzy



Numeric

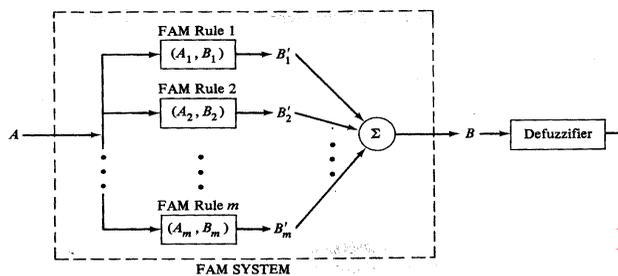
Numeric



Classi attive + fit delle classi → Regole + fit delle regole



# Progettazione di un sistema fuzzy: struttura

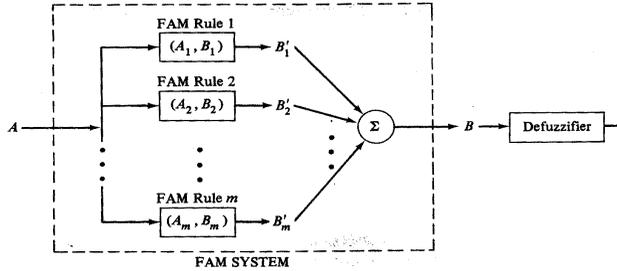


Per tutti i modelli

- 1) Identificazione delle variabili di I/O del sistema e del loro range (A e B).
- 2) Identificazione delle classi fuzzy in cui le variabili sono da suddividere e dei loro boundaries.
- 3) Definizione della trasformazione I/O come insieme di regole fuzzy: per ogni combinazione di classi fuzzy (con OR e/o AND) di input è possibile definire una classe di output (FAM).
- 4) Modalità di de-fuzzyficazione.



# Progettazione di un sistema fuzzy: funzionamento



- 1) Identificazione delle classi attivate da un certo input.
- 2) Valutazione del grado di fit delle classi.
- 3) Identificazione delle regole attivate.
- 4) Valutazione del grado di fit della regola.
- 5) Unione degli insiemi fuzzy di output risultanti e calcolo di un singolo valore numerico (defuzzificazione).



# Applications to real world (helicopter control)



Liskoping Studies in Science and Technology  
Thesis No. 108

**Fuzzy Control for an Unmanned Helicopter**

by  
**Bourhane Kadmiry**

Michał Lower  
Institute of Engineering Cybernetics  
Wrocław University of Technology  
Wyb. Wyspińskiego 27, 50-370 Wrocław, Poland  
Michał.Lower@pwr.wroc.pl

Bogusław Szlachetko  
Institute of Telecommunication and Acoustics  
Wrocław University of Technology  
Boguslaw.Szlachetko@pwr.wroc.pl

Dariusz Król  
Institute of Applied Informatics  
Wrocław University of Technology  
Dariusz.Krol@pwr.wroc.pl

### Abstract

*This paper relates to a fuzzy flight control system in spot hovering for a single-rotor helicopter PZL Kania<sup>1</sup>. The model of the fuzzy control system was developed on the basis of computer simulation experiments done by the expert's analysis (pilot's knowledge). The helicopter's mathematical model and its fuzzy logic control system were simulated on*

all the axis oriented to the fuselage was considered, assuming that fuzzy regulator works during and after the blow.

Although limited amount of expert's knowledge was available, the results proved the stability of the system. Hover parameters after the blow disturbances stabilize in all considered axes.



**INSTITUTE OF TECHNOLOGY**  
WROCLAW UNIVERSITY

Submitted to the School of Engineering at Liskoping University in partial fulfillment of the requirements for degree of Licentiate of Engineering.

Department of Computer and Information Science  
Liskoping university  
SE-581 83 Liskoping, Sweden

Liskoping 2002

In Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, pp. 805-810, Oct 2003, Las Vegas, USA

### A Tale of Two Helicopters

Sikandar Singh<sup>1</sup>, Jonathan M. Buhner<sup>2</sup>, Peter L. Cooke<sup>3</sup>, Gregg Roskey<sup>4,5</sup>  
<sup>1</sup>Buhalwa Research Lab, University of Southern California, Los Angeles, USA  
<sup>2</sup>CSIRO Manufacturing & Infrastructure Technology, PO Box 883, Kensington, QLD 4090, Australia  
<sup>3</sup>University of Queensland, St. Lucia, QLD 4068, Australia

### Abstract

*This paper discusses similarities and differences in autonomous helicopters developed at USC and CSIRO. The most significant differences are in the sensory and control systems of the two systems and the control. The USC helicopter is a single-rotor helicopter with a fixed rotor speed. The CSIRO helicopter is a single-rotor helicopter with a variable rotor speed. The two helicopters are compared in terms of their control systems and their performance in hover and in the presence of disturbances.*



shrabar  
[Cite], [Br]  
In Proceedings  
International  
Intelligent R  
Systems, pp  
2003, Las V



## FAM basate sull'analisi di più variabili



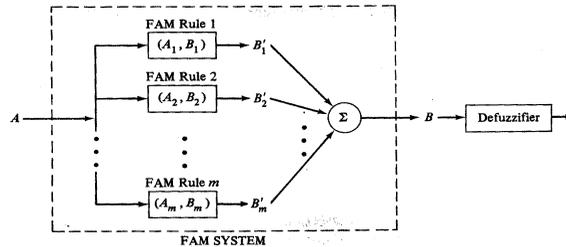
Più classi composte, attivate contemporaneamente.

1. IF (... AND ... AND ... AND ....) THEN
2. IF (... AND ... OR ... AND ....) THEN
- .....

1. Un dato di input, A, avrà una certa fit rispetto alle classi fuzzy in cui viene suddivisa la variabile associata a quell'input.

2. Le fit associate agli argomenti delle regole vengono combinate con AND (minimo) e OR (massimo) utilizzando le T-norm.

3. La combinazione avrà una sua fit: fit della regola.



Ogni combinazione attiva una proposizione della FAM.  
Più combinazioni possono essere attive.

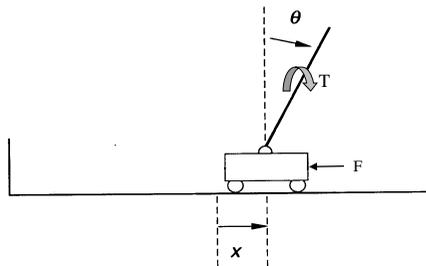


## Video con cart pole





# Cart-pole



Input:  $A\{\theta(t), \theta'(t), x(t), x'(t)\}$

Output:  $B\{F(t), T(t)\}$

Scopo del sistema di controllo è non fare cadere il bastone e mantenere il carrello sulla rotaia.

Il sistema è altamente non lineare, non si può applicare la teoria del controllo lineare.  
Il sistema è altamente instabile (pendolo inverso)

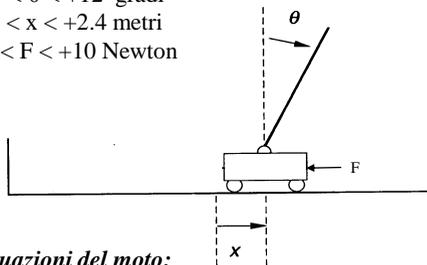


# Parametri del sistema Cart-pole completo (Mathematica!)

### Vincoli possibili:

- $-12^\circ < \theta < +12^\circ$  gradi
- $-2.4 < x < +2.4$  metri
- $-10 < F < +10$  Newton

Condizioni iniziali:  $\theta(0) = \theta'(0), x(0), x'(0) = 0$



### Parametri:

- $g$  9.8m/s
- $m$  1.1kg (massa carrello + palo)
- $m_p$  0.1kg (massa del palo)
- $l$  0.5m distanza della cerniera dal centro di massa del palo.
- $\Delta t$  0.02s (intervallo di campionamento e di controllo).

### Equazioni del moto:

$$\theta(t+1) = \theta(t) + \theta'(t) \Delta t$$

$$x(t+1) = x(t) + x'(t) \Delta t$$

$$\mathcal{G}'(t+1) = \mathcal{G}(t) + \frac{mg \sin(\mathcal{G}(t)) - \cos(\mathcal{G}(t)) \left( F(t) + m_p l (\mathcal{G}'(t) \pi / 180)^2 \sin(\mathcal{G}(t)) \right)}{(4/3)ml - m_p l \cos^2(\mathcal{G}(t))} \Delta t$$

$$x'(t+1) = x'(t) + \frac{f(t) + m_p l \left( (\mathcal{G}'(t) \pi / 180)^2 \sin(\mathcal{G}(t)) - \mathcal{G}'(t) \pi / 180 \cos(\mathcal{G}(t)) \right)}{m} \Delta t$$



# Obiettivo

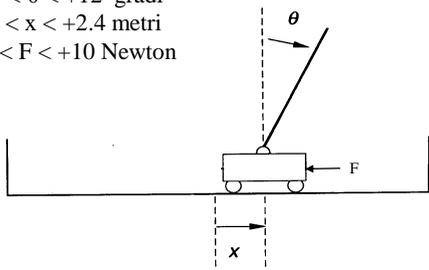
### Vincoli possibili:

- 12° < θ < +12° gradi
- 2.4 < x < +2.4 metri
- 10 < F < +10 Newton

Condizioni iniziali: θ(0) = θ'(0), x(0), x'(0) = 0

F(t) tale per cui il palo è in equilibrio:

- θ(t) = 90 gradi
- θ'(t) = 0



$$\theta'(t+1) = \theta'(t) + \frac{mg \sin(\theta(t)) - \cos(\theta(t)) (F(t) + m_p l (\theta'(t)\pi/180)^2 \sin(\theta(t)))}{(4/3)ml - m_p l \cos^2(\theta(t))} \Delta t$$

$$x'(t+1) = x'(t) + \frac{f(t) + m_p l ((\theta'(t)\pi/180)^2 \sin(\theta(t)) - \theta''(t)\pi/180 \cos(\theta(t)))}{m} \Delta t$$



# FAM per il cart-pole semplificato

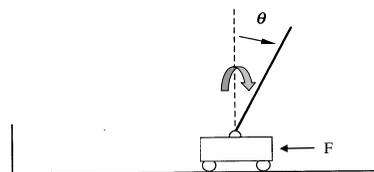
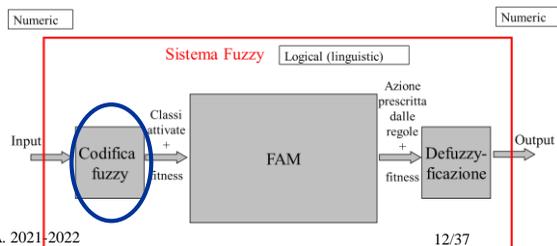
Consideriamo solamente il pendolo inverso semplificato:

### 1a) Identificazione delle variabili del sistema:

Input: A: {θ(t), θ'(t)}      Output: B: {F(t)}

### 1b) Definizione dei range delle 3 variabili:

- θ(t)      range    [-90 +90] gradi
- θ'(t)}    range    (-∞ +∞) gradi/s
- F(t)      range    [-25 +25] N





## FAM per il cart-pole: classi fuzzy



2) Quantificazione delle variabili in classi fuzzy:

- a) Definizione delle classi fuzzy.
- b) Definizione della forma e dei boundary delle funzioni di appartenenza.

*Esempio di classi fuzzy:*

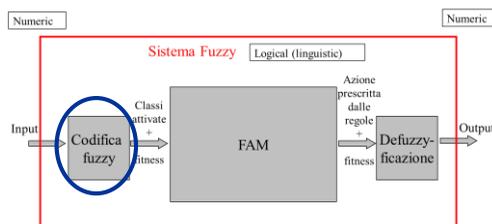
NL: Molto negativo (“negative large”)  
 NM: Mediamente negativo  
 NS: Poco negativo (“negative small”)  
 ZE: Zero  
 PS: Poco positivo  
 PM: Mediamente positivo  
 PL: Molto positivo



## FAM per il cart-pole: funzioni di appartenenza



2b) Definizione della forma e dei boundary delle funzioni di appartenenza per ciascuna variabile fuzzy (di input e di output).



Le regioni sono solitamente triangolari o trapezoidali. Sovrapposizione, empiricamente 25%.

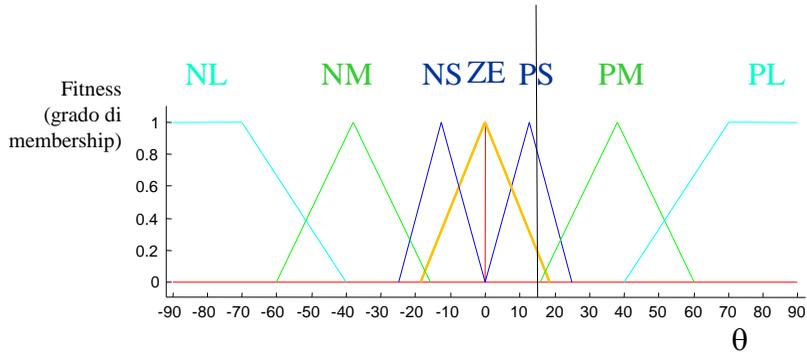
**NB Le regioni sono più strette intorno allo 0, per avere una maggiore risoluzione e precisione.**



## FAM per il cart-pole: funzioni di appartenenza considerate per orientamento



Input: ( $\theta = 15, \theta' = -10$ )



Classi attivate:

PS – grado di fitness 0.8

ZE – grado di fitness 0.2

Classi definite sul supporto di  $\theta$

A.A. 2021-2022

15/37

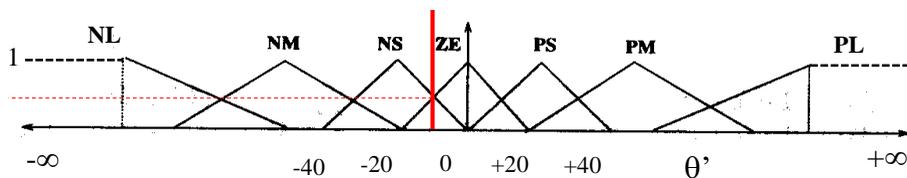
<http://borgnese.di.unimi.it>



## FAM per il cart-pole: funzioni di appartenenza considerate per velocità angolare



Input: ( $\theta = 15, \theta' = -10$ )



Classi attivate:

NS – grado di fitness 0.5

ZE – grado di fitness 0.5

Bilanciamento tra crisp e ridondanza

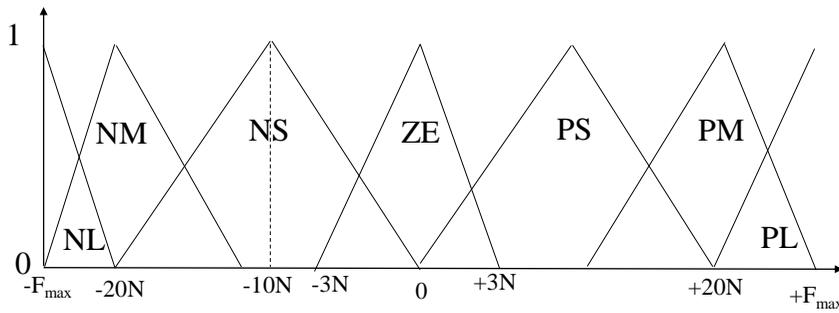
A.A. 2021-2022

16/37

<http://borgnese.di.unimi.it>



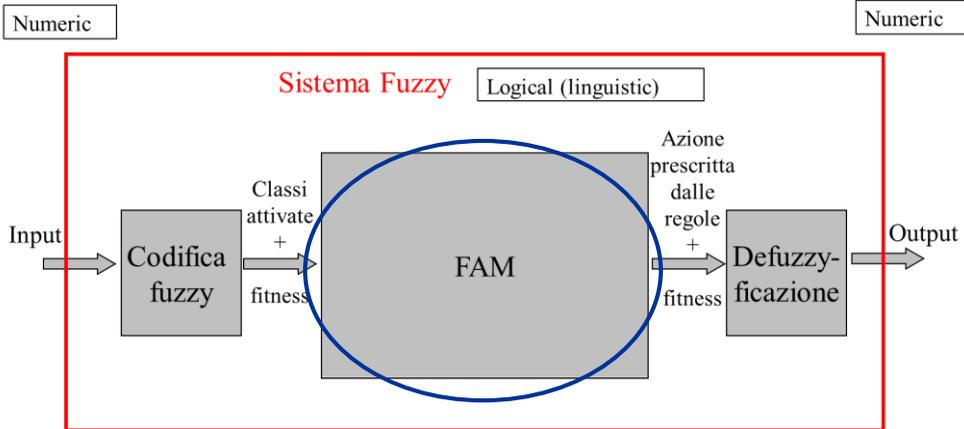
## Fuzzyficazione dell'output



Considero 7 classi anche per questa variabile:  $F(t)$ .



## FAM per il cart-pole





## FAM per il cart-pole: costruzione della relazione I/O



Entrano in gioco 3 variabili:  $A_1^{\theta}$ ,  $A_2^{\theta'}$ ;  $B^F$ .

La FAM trasforma  $A_1$  e  $A_2$  in  $B$ :  $(A_1^{\theta}, A_2^{\theta'}; B^F)$ .

Possiamo anche scrivere la trasformazione della FAM come:

$$(\theta, \theta'; F) \Rightarrow F = \text{funz}(\theta, \theta'). \quad I^2 \rightarrow I.$$

La funzione di controllo è una superficie in  $R^3$ .

La trasformazione avviene mediante regole linguistiche fornite dall'esperto di dominio.



## Le regole nella FAM



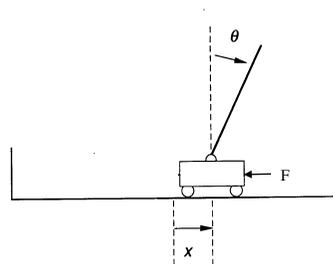
Una delle possibili *regole* della FAM può essere: (NM, ZE; PM).

Determino  $F$  ( $F_{PM}$ ) a partire da  $\theta$  ( $\theta_{NM}$ ) e  $\theta'$  ( $\theta'_{ZE}$ ).

**if** <l'orientamento del pendolo è negativa media> **and**  
<la velocità di rotazione è circa nulla>

**allora**

<il motore dovrà fornire una forza di spinta positiva media>



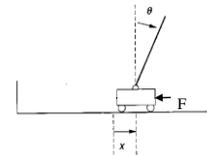
Le singole variabili non possono essere analizzate singolarmente, ma deve essere analizzata una loro combinazione.



# FAM per il cart-pole: costruzione grafica della relazione I/O



$\theta \backslash \theta'$	NL	NM	NS	ZE	PS	PM	PL
NL				PL			
NM				PM			
NS				PS	NS		
ZE	PL	PM	PS	ZE	NS	NM	NL
PS			PS	NS			
PM				NM			
PL				NL			



Vengono codificate solamente 15 regole.

La tabella rappresenta una superficie in  $R^3$ .

Riduciamo la matematica ad un **discorso linguistico intuitivo**. Questo è particolarmente interessante quando si vuole trasferire della **conoscenza**, che di per sé viene espressa in **termini linguistici** (e non matematici)!

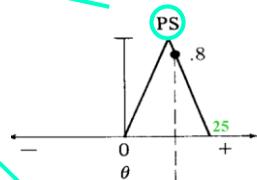


# FAM per il cart-pole: la prima regola fuzzy attivata



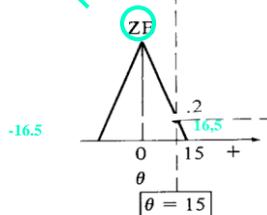
$\theta \backslash \theta'$	NL	NM	NS	ZE	PS	PM	PL
NL				PL			
NM				PM			
NS				PS	NS		
ZE	PL	PM	PS	ZE	NS	NM	NL
PS			PS	NS			
PM				NM			
PL				NL			

Posizione



fit 0.8

C'è anche la velocità angolare da considerare



fit 0.2

Input: ( $\theta = 15$ ,  $\theta' = -10$ )

Regole attivate:

(PS, ZE; NS)

(ZE, ZE; ZE)

(PS, NS; NS)

(ZE, NS; PS)



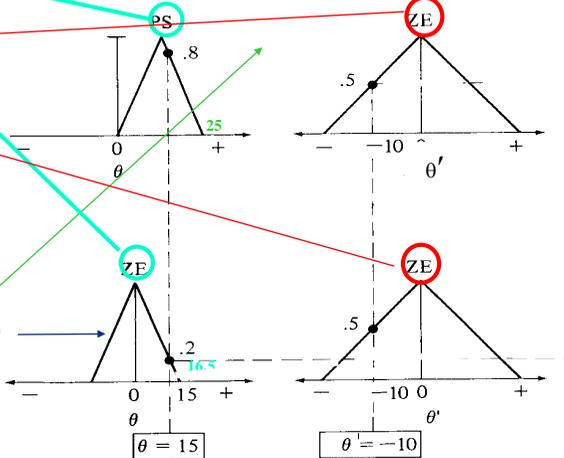
# FAM per il cart-pole: le prime 2 regole fuzzy attivate



$\theta$	NL	NM	NS	ZE	PS	PM	PL
NL							
NM							
NS							
ZE	PL	PM	PS	ZE	NS	NM	NL
PS			PS	NS			
PM							
PL							

Posizione

Velocità



Input: ( $\theta = 15, \theta' = -10$ )

Regole attivate:

(PS,ZE; NS) ( $\min(0.8,0.5) \rightarrow \text{fit } 0.5$ )

(ZE,ZE; ZE) ( $\min(0.2,0.5) \rightarrow \text{fit } 0.2$ )

(PS,NS; NS) ( $\min 0.8,0.5 \rightarrow \text{fit } 0.5$ )

(ZE,NS; PS) ( $\min 0.2,0.5 \rightarrow \text{fit } 0.2$ )

**min Tnorm**

A.A. 2021-2022

23/37

<http://borgnese.di.unimi.it>



# FAM per il cart-pole: output prodotto dalla prima regola



$\theta$	NL	NM	NS	ZE	PS	PM	PL
NL							
NM							
NS							
ZE	PL	PM	PS	ZE	NS	NM	NL
PS			PS	NS			
PM							
PL							

Input: ( $\theta = 15, \theta' = -10$ )

Regola attivata:

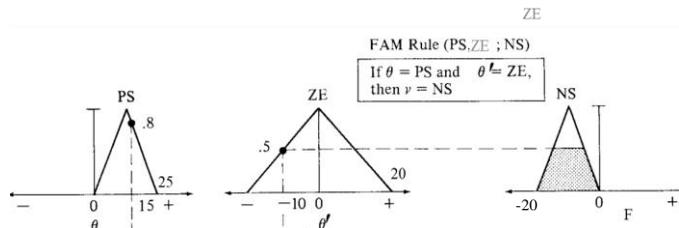
(PS,ZE;NS)

Peso della regola:

(0.8,0.5; 0.5)

AND!!

(min)



Fit dell'output  $F_{NS}$ :  
grado di fit della regola (0.5)

A.A. 2021-2022

24/37

<http://borgnese.di.unimi.it>



# FAM per il cart-pole: output prodotto dalle prime due regole



$\theta$ \ $\theta'$	NL	NM	NS	ZE	PS	PM	PL
NL				PL			
NM				PM			
NS				PS	NS		
ZE	PL	PM	PS	ZE	NS	NM	NL
PS				PS	NS		
PM				NM			
PL				NL			

Input:  $(\theta = 15, \theta' = -10)$

Insiemi attivati:

(PS, ZE)

(ZE, ZE)

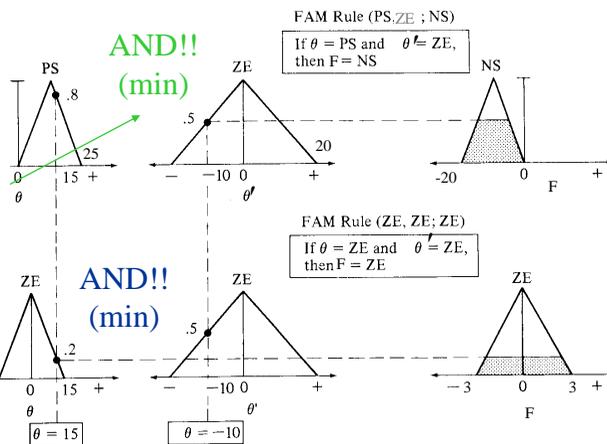
(PS, NS)

(ZE, NS)

Regole FAM attivate:

(ZE, ZE; ZE) (PS, NS; NS)

(PS, ZE; NS) (ZE, NS; PS)



# Pesatura dell'output (prime due regole)



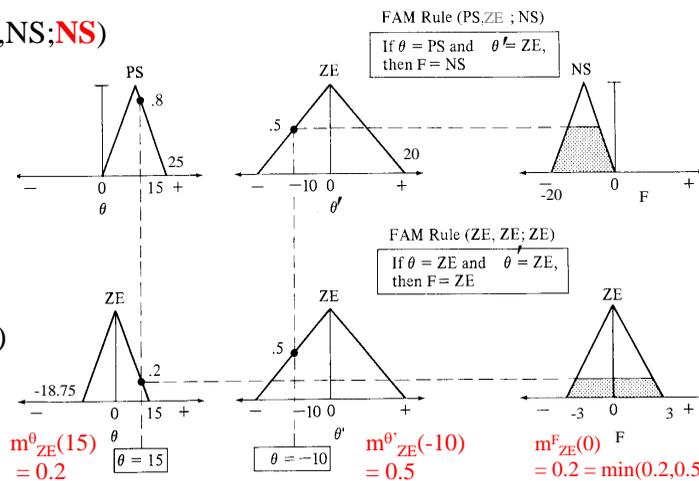
$(\theta, \theta') = (15, -10) \rightarrow (PS, NS; NS)$

Fit della regola 0.5  $\rightarrow$

Grado di appartenenza di **F a NS**: 0.5

$(-15, 10) \rightarrow (ZE, NS; PS)$

Grado di appartenenza di **F a PS**: 0.2



Ciascuna regola dà un contributo secondo la logica fuzzy (AND fuzzy = min)



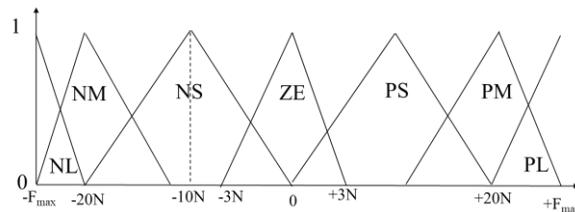
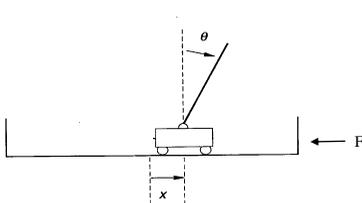
## Defuzzyficazione delle 4 regole attivate: metodo del massimo



(ZE, ZE; ZE)	fit 0.2
(PS, ZE; NS)	fit 0.5
(PS, NS; NS)	fit 0.5
(ZE, NS; PS)	fit 0.2

Scelgo come output la classe NS, se avessi attive due classi con lo stesso grado di fit devo operare una scelta.

In questo caso, scelgo la classe NS per la forza in uscita:  $F = -10N = F_{NS}$



A.A. 2021-2022

27/37

<http://borghese.di.unimi.it/>



## Defuzzyficazione delle 4 regole attivate: metodo del baricentro



(ZE, ZE; ZE)	fit 0.2
(PS, ZE; NS)	fit 0.5
(PS, NS; NS)	fit 0.5
(ZE, NS; PS)	fit 0.2

Scelgo come output il baricentro, o media pesata con le fit, delle azioni.

$$Y = \frac{(0 \cdot 0.2 - 10 \cdot 0.5 - 10 \cdot 0.5 + 10 \cdot 0.2)N}{0.2 + 0.5 + 0.5 + 0.2} = -\frac{8}{1.4}N \approx -5.714N$$

A.A. 2021-2022

28/37

<http://borghese.di.unimi.it/>



# Osservazioni

Metodo del massimo:  $Y = -10$

Metodo del baricentro:  $Y \approx -5.714$

Metodo del baricentro pesato con le aree:  $Y \approx -5.876$

Con il metodo del massimo viene presa una decisione “crisp”, in stile “winner-takes-all”. La regola più forte vince. Variazioni anche piccole degli input possono provocare discontinuità nel momento in cui diventa più forte una regola diversa.

I metodi del baricentro sono più gradual. Al variare dell’input, varia gradualmente anche la forza generate perchè varia il grado di appartenenza alle diverse classi.

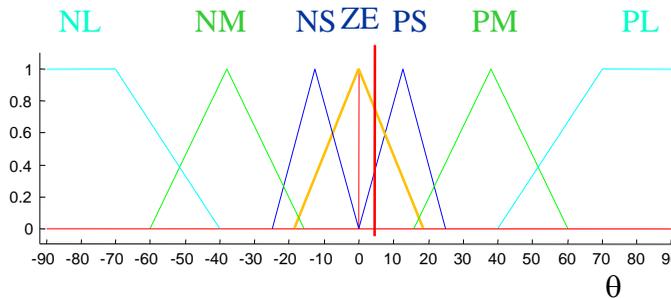
Quando il baricentro viene pesato con l’area, la variazione di output viene pesata con l’ampiezza della regione racchiusa in ciascuna classe di output.



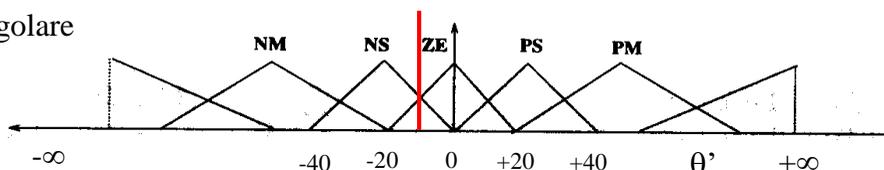
# FAM per il cart-pole: funzioni di appartenenza considerate per posizione e velocità

Orientamento

Input: ( $\theta = 4$ ,  $\theta' = -10$ )



Velocità angolare





## FAM per il cart-pole: palo più verticale



$\theta \setminus \theta'$	NL	NM	NS	ZE	PS	PM	PL
NL				PL			
NM				PM			
NS				PS	NS		
ZE	PL	PM	PS	ZE	NS	NM	NL
PS			PS	NS			
PM				NM			
PL				NL			

Scelgo come output il baricentro, o media pesata con le fit, delle forze prescritte.

$$F = \frac{(-10 \cdot 0.2 + 0 \cdot 0.5 - 10 \cdot 0.5 + 10 \cdot 0.5)N}{0.2 + 0.5 + 0.5 + 0.5} = -\frac{2}{1.7}N \approx -1.176N$$

**Input:** ( $\theta = 4$ ,  $\theta' = -10$ )

**Regole attivate:**

- (PS, ZE; NS) (grado 0.2)
- (ZE, ZE; ZE) (grado 0.5)
- (PS, NS; NS) (grado 0.5)
- (ZE, NS; PS) (grado 0.5)

Classi attivate per  $\theta = 4$ :

- ZERO (elementhood 0.8)
- PS (0.2)



## Banco di FAM



Generalizzazione naturale ai sistemi multi-output.  
Ciascuna variabile di uscita è generata da una FAM diversa.

**Esempio relativo al cart-pole.**

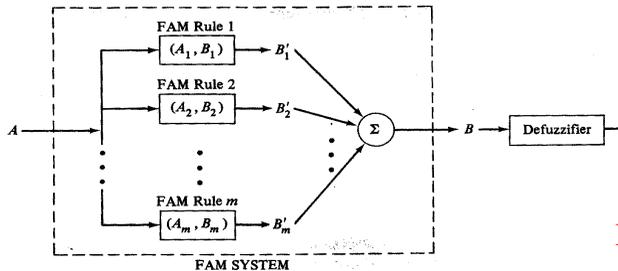
Sia A l'input (stato del sistema, 4 variabili), e B l'output (la forza, ed il momento, 2 variabili), avremo 2 FAM del tipo: ( $A_i$ ,  $B_j$ ), dove ciascuna FAM ha 4 variabili di ingresso e 1 di uscita. Ciascuna FAM implementa le sue regole indipendenti.

Queste FAM parziali sono dette *elementari o minime*.

**Il numero di FAM cresce velocemente con il numero di variabili in uscita (e così il numero di regole).**



## Progettazione di un sistema fuzzy: struttura

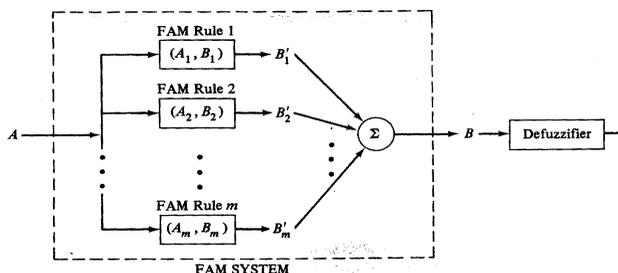


Per tutti i modelli

- 1) Identificazione delle variabili di I/O del sistema e del loro range (A e B).
- 2) Identificazione delle classi fuzzy in cui le variabili sono da suddividere e dei loro boundaries.
- 3) Definizione della trasformazione I/O come insieme di regole fuzzy: per ogni combinazione di classi fuzzy (con OR e/o AND) di input è possibile definire una classe di output (FAM).
- 4) Modalità di de-fuzzyficazione.



## Progettazione di un sistema fuzzy: funzionamento



- 1) Identificazione delle classi attivate da un certo input.
- 2) Valutazione del grado di fit delle classi.
- 3) Identificazione delle regole attivate.
- 4) Valutazione del grado di fit della regola.
- 5) Unione degli insiemi fuzzy di output risultanti e calcolo di un singolo valore numerico (defuzzyficazione).



## Riflessioni



- Da dove viene la conoscenza?
- Come si può tradurre la conoscenza in regole?
- Come si possono tarare le membership function?
- Quale vantaggio c'è a defuzzificare utilizzando la media pesata invece della massima fit nel calcolo dell'uscita di un sistema fuzzy?
- Crescita esponenziale del numero di stati con il numero di variabili di input ( $7^N$  in questo caso).

		$\theta$						
		NL	NM	NS	ZE	PS	PM	PL
$\theta'$	NL				PL			
	NM				PM			
	NS				PS	NS		
	ZE	PL	PM	PS	ZE	NS	NM	NL
	PS			PS	NS			
	PM				NM			
	PL				NL			



## Esempi



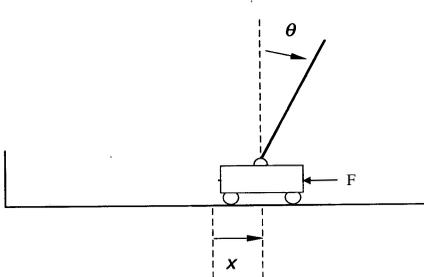
Si vuole realizzare un sistema di controllo fuzzy della frenata per un treno della metropolitana milanese. Il sistema deve essere in grado di erogare la forza frenante in modo tale che il treno si arresti al punto giusto, indipendentemente dal numero di passeggeri (indipendentemente dal carico). Si ha a disposizione la distanza rispetto al punto di frenata, in metri. Definire le variabili di ingresso e di uscita del sistema di controllo della frenata. Progettare il sistema di controllo fuzzy e definire almeno 4 regole di inferenza che agiscano sulle variabili di ingresso fuzzyficate.

Come si può tenere conto del confort dei passeggeri?

Implementazione di un controllore di temperatura che agisce su un fornello.



# Esercitazione sui sistemi fuzzy



$\theta \backslash \theta'$	NL	NM	NS	ZE	PS	PM	PL
NL				PL			
NM				PM			
NS				PS	NS		
ZE	PL	PM	PS	ZE	NS	NM	NL
PS			PS	NS			
PM				NM			
PL				NL			